

Institution 中理论与模型的闭包定理

刘富春

广东工业大学数理系, 广州, 510090

摘要 在一般的逻辑框架 Institution 中, 研究了理论与模型的一些性质, 特别是得到了理论的闭包定理和与之相应的模型的闭包定理.

关键词 程序规范说明; 抽象模型论; 范畴论

中图分类号 O141; TP311.1

为了给说明语言 lear 提供合理的语义^[1], 近年来 Goguen J A 和 Burstall R M 建立了一种适应于程序规范说明的抽象模型论— Institution^[2].

我们知道, 文献[2]中最根本性的结果是定理 11 和定理 39, 不难发现在这些定理的证明中都使用了理论的闭包引理(见[2]的引理 7), 这足以说明闭包引理的重要性. 本文对它进行了更深入更详细的研究, 得到了理论与模型的一些性质, 特别是得到了理论的闭包定理(定理 7)和模型的闭包定理(定理 8).

定义 1^[2] 一个 Institution $\mathcal{I}$ 是由下列组成

(1) 标识范畴 Sign ;

(2) 函子 $\text{Sen}: \text{Sign} \rightarrow \text{Set}$. 每个标识 Σ 对应于一个 Σ —语句集 $\text{Sen}(\Sigma)$;

(3) 函子 $\text{Mod}: \text{Sign} \rightarrow \text{at}^{\text{op}}$. 每个标识 Σ 对应于一个范畴 $\text{Mod}(\Sigma)$, 它是以 Σ —模型为对象, 以 Σ —模型态射为态射;

(4) 对每个标识 Σ , 有一个 Σ —满足关系 $\models \subseteq |\text{Mod}(\Sigma)| \times \text{Sen}(\Sigma)$, 使得对每个标识态射 $\varphi: \Sigma' \rightarrow \Sigma$ 有下列满足性条件

$$m' \models \Sigma' \cdot \varphi(e) \quad \text{iff} \quad \varphi(m') \models \Sigma^{\circ}$$

成立, 其中 $m' \in |\text{Mod}(\Sigma')|$, $e \in \text{Sen}(\Sigma)$.

ting 本文所用的记号和概念可详见[2~6].

下文中均假设 $\varphi: \Sigma' \rightarrow \Sigma$ 是 Institution $\mathcal{I}$ 的标识态射, $E \subseteq \text{Sen}(\Sigma)$ 和 $M \subseteq |\text{Mod}(\Sigma)|$ 分别是 Σ —语句集和 Σ —模型类, $E' \subseteq \text{Sen}(\Sigma')$ 和 $M' \subseteq |\text{Mod}(\Sigma')|$ 分别是 Σ' —语句集和 Σ' —模型类. $\varphi(E) = \{\varphi(e) \mid e \in E\}$, $\varphi^{-1}(E') = \{e \in \text{Sen}(\Sigma) \mid \varphi(e) \in E'\}$, $\varphi(M') = \{\varphi(m') \mid m' \in M'\}$, $\varphi^{-1}(M) = \{m' \in |\text{Mod}(\Sigma')| \mid \varphi(m') \in M\}$.

我们用 E^* 表示集合 $\{m \in |\text{Mod}(\Sigma)| \mid m \models \Sigma E\}$, M^* 表示 $\{e \in \text{Sen}(\Sigma) \mid (\forall m \in M) m \models \Sigma e\}$, 并称 E^{**} 为 E 的闭包, M^{**} 为 M 的闭包, 分别简记为 E^* 和 M^* .

根据满足性条件不难得到, 对任意 Σ —语句集 E 都有 $\varphi^{-1}(E^*) = (\varphi E)^*$, 但是对于任意 Σ' —模型类 M' , 是否有 $\varphi^{-1}(M'^*) = (\varphi M')$ 呢? 由下面的定理将得到肯定的回答.

定理 1 设 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$; 则下列条件等价

- (1) 对任意 $m \in \text{Mod}(\Sigma)$, $e \in \text{Sen}(\Sigma')$ 都有 $m \models e \iff \Sigma \models \varphi(e)$ $\varphi(m) \models e$.
- (2) 对任意 Σ - 语句集 E , 都有 $\varphi^{-1}(E^*) = (\varphi E)^*$.
- (3) 对任意 Σ - 模型类 M ; 都有 $\varphi^{-1}(M^*) = (\varphi M)^*$.

证 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 见文献 [2]. 下证 (1) $\Leftrightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (3) 的证明 若 (1) 成立, 则对于上述 M ; $e \in \varphi^{-1}(M^*) \Leftrightarrow \varphi(e) \in M^* \Leftrightarrow M \models \Sigma \varphi(e)$

$\Leftrightarrow$ 对所有 $m \in M$; $m \models \Sigma \varphi(e)$

$\Leftrightarrow$ 对所有 $m \in M$; $\varphi(m) \models \Sigma \varphi(e)$ (由 (1) 得到)

$\Leftrightarrow \varphi(M) \models \Sigma e \Leftrightarrow e \in (\varphi M)^*$,

从而 $\varphi^{-1}(M^*) = (\varphi M)^*$.

(3) $\Rightarrow$ (1) 的证明 若 (3) 成立, 则有

$m \models \Sigma \varphi(e) \Leftrightarrow \varphi(e) \in m^* \Leftrightarrow e \in \varphi^{-1}(m^*)$

$\Leftrightarrow e \in \varphi(m)^*$ (这由 (3) 得到) $\Leftrightarrow \varphi(m) \models \Sigma e$. 证毕

这个定理表明, 对任意 Σ - 模型类 M ; 都有 $\varphi^{-1}(M^*) = (\varphi M)^*$ 成立.

定理 2 设 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$; 则下列条件等价

- (1) $\varphi: \text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma')$ 在对象上是满射;
- (2) 对任意 Σ - 语句集 E , 都有 $\varphi((\varphi E)^*) = E^*$;
- (3) 对任意 Σ - 语句集 E , 都有 $\varphi(\varphi^{-1}(E^*)) = E^*$.

证 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 见文献 [2] 命题 4.

(2) $\Rightarrow$ (1) 的证明. 设 m 是任意 Σ - 模型, 根据 (2) 得, 对于 Σ - 语句集 m^* 有 $\varphi(\varphi(m^*)^*) = m^{**}$. 注意到 $m \in m^{**}$, 从而 $m \in \varphi(\varphi(m)^*)^*$, 即存在 Σ - 模型 $m' \in \varphi(m^*)^*$, 使得 $m = \varphi(m')$. 这说明函子 $\varphi: \text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma')$ 在对象上为满射.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 由定理 1 (2) 易证. 证毕

定理 3 设 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$; 如果 $\varphi: \text{Sen}(\Sigma) \rightarrow \text{Sen}(\Sigma')$ 是满射, 则对任意 Σ - 模型类 M ; 都有 $\varphi((\varphi M)^*) = M^*$.

证 如果 Σ - 语句 $e \in \varphi((\varphi M)^*)$, 则存在 Σ - 语句 $e' \in (\varphi M)^*$, 使得 $e = \varphi(e')$. 从 $\varphi M \models \Sigma e$, 即对所有 Σ - 模型 $m \in M$; 都有 $\varphi \Sigma e$. 根据满足性条件得, 对所有 $m \in M$; 都有 $m \models \Sigma \varphi(e)$, 所以 $M \models \Sigma \varphi(e)$, $\varphi(e) \in M^*$. 注意到 $e = \varphi(e')$, 因而 $e' \in M^*$. 这表明 $\varphi((\varphi M)^*) \subseteq M^*$.

反之, 如果 $e' \in M^*$, 则 $M \models \Sigma e'$. 因为已知: $\text{Sen}(\Sigma) \rightarrow \text{Sen}(\Sigma')$ 是满射, 所以对于 Σ - 语句 e ; 存在 Σ - 语句 e' , 使得 $e = \varphi(e')$. 从而 $M \models \Sigma \varphi(e)$. 即对所有 $m \in M$; 都有 $m \models \Sigma \varphi(e)$. 根据满足性条件得, 对所有 $m \in M$; 都有 $\varphi(m) \models \Sigma e$, $e \in (\varphi M)^*$, $e = \varphi(e') \in \varphi((\varphi M)^*)$, 这表明 $M \subseteq \varphi((\varphi M)^*)$.

因此 $\varphi((\varphi M)^*) = M^*$. 证毕

定理 4 设 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$; 则下列条件等价

- (1) $\varphi: \text{Sen}(\Sigma) \rightarrow \text{Sen}(\Sigma')$ 是满射;
- (2) 对任意 Σ - 模型类 M ; 都有 $\varphi((\varphi M)^*) = M^*$;
- (3) 对任意 Σ - 模型类 M ; 都有 $\varphi(\varphi^{-1}(M^*)) = M^*$.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 由定理 3 得证.

(2) $\Rightarrow$ (1) 的证明. 设 $e \in \text{Sen}(\Sigma)$. 根据 (2), 对于 Σ -模型类 e^* , 有 $\varphi((\varphi(e^*))^*) = e^{**}$ 成立. 因为 $e \in e^{**}$, 所以 $e \in \varphi((\varphi(e^*))^*)$, 即存在 Σ -语句 $e \in (\varphi e^*)^*$, 使得 $e \models \varphi(e)$. 这说明 $\varphi: \text{Sen}(\Sigma) \rightarrow \text{Sen}(\Sigma')$ 是满射.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 由定理 1(3) 易得. 证毕.

建立了这些结果之后, 我们就可以进一步更深入地研究理论的闭包. 先叙述文献[2]中的闭包引理如下

闭包引理^[2] 设 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$, 则对任意 Σ -语句集 E , 都有 $\varphi(E^\bullet) \subseteq \varphi(E)^\bullet$ 成立.

由闭包引理容易得到下面的推论

推论 5 设 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$, E 和 e 分别是 Σ -语句集和 Σ -语句. 如果 $E \models e$, 则 $\varphi(E) \models \varphi(e)$.

证 设 Σ' -模型 m 满足 Σ' -语顺集 $\varphi(E)$, 也即 $m \models \Sigma \varphi(E)$. 由满足性条件得 $\varphi(m) \models \Sigma E$. 因为已知 $E \models e$, 所以 $\varphi(m) \models \Sigma e$. 再根据满足性得 $m \models \Sigma \varphi(e)$, 即 m 也是满足 $\varphi(e)$ 的模型, 从 $\varphi(E) \models \varphi(e)$. 证毕.

下面我们增加一个条件后, 得到一个更为漂亮的结果.

定理 6 设 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 如果 $\varphi: \text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma')$ 在对象上为满射, 则 $E \models e$ 的充要条件是 $\varphi(E) \models \varphi(e)$.

证 必要性由推论 5 得证, 下面证充分性.

如果 $\varphi(E) \models \varphi(e)$, 则 $\varphi(e) \in (\varphi E)^*$, 也即 $e \in \varphi^{-1}((\varphi E)^*)$. 由定理 1(3) 得 $\varphi^{-1}((\varphi E)^*) = \varphi((\varphi E)^*)^*$ 从而 $e \in \varphi((\varphi E)^*)^*$, 又由于已知 $\varphi: \text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma')$ 在对象上为满射, 根据定理 2 得 $\varphi((\varphi E)^*)^* = E^{**}$, 这样 $e \in E^{**}$, 也即 $E \models e$. 证毕.

下面我们就可以得到理论的闭包定理如下

定理 7 设 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 如果 $\varphi: \text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma')$ 在对象上为满射, 且 $\varphi: \text{Sen}(\Sigma) \rightarrow \text{Sen}(\Sigma')$ 也是满射, 则对任意 Σ -语句集 E , 都有 $\varphi(E^\bullet) = (\varphi E)^\bullet$, 即 $\{e \mid E \models e\} = \{e \mid \varphi E \models e\}$ 有

证 因为已知 $\varphi: \text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma')$ 在对象上是满射, 由定理 2 得

$$\varphi((\varphi E)^*) = E^*. \quad (7.1)$$

由于 $\varphi: \text{Sen}(\Sigma) \rightarrow \text{Sen}(\Sigma')$ 是满射, 根据定理 4, 对于 Σ -模型类 $(\varphi E)^*$ 有

$$\varphi((\varphi((\varphi E)^*))^*) = ((\varphi E)^*)^*, \quad (7.2)$$

从而 $\varphi(E^\bullet) = \varphi(E^{**}) = \varphi((E^*)^*) \xrightarrow{(7.1)} \varphi((\varphi((\varphi E)^*))^*) \xrightarrow{(7.2)} ((\varphi E)^*)^* = (\varphi E)^\bullet$, 即 $\varphi(E^\bullet) = (\varphi E)^\bullet$. 证毕.

对于理论的闭包, 不需要其他条件, 就有 $\varphi(E^\bullet) \subseteq (\varphi E)^\bullet$ 成立, 但对于模型的闭包却不是无条件的, 下面我们给出相应的模型的闭包定理.

定理 8 设 $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ 如果 $\varphi: \text{Sen}(\Sigma) \rightarrow \text{Sen}(\Sigma')$ 是满射, 则对任意 Σ -模型类 M , 都有

$$\varphi(M^\bullet) \subseteq \varphi(M)^\bullet.$$

如果又有 $\varphi: \text{Mod}(\Sigma) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma')$ 在对象上为满射, 则 $\varphi(M^\bullet) = \varphi(M)^\bullet$.

证 (1) 设 $\varphi: \text{Sen}(\Sigma) \rightarrow \text{Sen}(\Sigma')$ 是满射. 如果 Σ -模型 $m \in \varphi(M^\bullet)$, 则存在 $m \in M^* = M^{**}$, 使 $m = \varphi(m)$. 也即 $m \models \Sigma M^*$ 且 $m = \varphi(m)$. 由于 $\varphi: \text{Sen}(\Sigma) \rightarrow \text{Sen}(\Sigma')$ 是满射, 根据定理 4 得 $M^* = \varphi((\varphi M)^*)$. 因此 $m \models \Sigma \varphi((\varphi M)^*)$. 由满足性条件得 $\varphi(m) \models \Sigma (\varphi M)^*$. 即 $\varphi(m) \models ((\varphi M)^*)^* = (\varphi M)^\bullet$, 注意到 $\varphi(m) = m$, 所以 $m \models (\varphi M)^\bullet$, 这说明 $\varphi(M^\bullet) \subseteq \varphi(M)^\bullet$.

(2) 如果又假设 $U: \text{Mod}(E) \rightarrow \text{Mod}(E)$ 在对象上为满射. 要进一步证明 $U(M^P) = (UM)^P$, 下面只需证明 $(UM)^P \leq U(M^P)$ 就可以.

事实上, 若 E -模型 $m \leq (UM)^P = (UM)^{**}$, 那么 $m \leq_r (UM)^*$. 因为 $U: \text{Mod}(E) \rightarrow \text{Mod}(E)$ 在对象上是满射, 所以对于 E -模型 m , 存在 E -模型 m' 使得 $m = U(m')$, 从而 $U(m') \leq_r (UM)^*$. 根据满足性条件, 就有 $m' \leq_r U((UM)^*)$. 由定理 4 可知, $U((UM)^*) = M^*$. 这样 $m' \leq_r M^*$, 即 $m \leq M^{**} = M^P$, $U(m') \leq U(M^P)$. 注意到 $m = U(m')$, 故 $m \leq U(M^P)$. 从而 $(UM)^P \leq U(M^P)$. 综合(1)就有 $U(M^P) = (UM)^P$. 证毕.

推论 9 设 $U: E \rightarrow E$; 如果 $U: \text{Sen}(E) \rightarrow \text{Sen}(E)$ 是满射, 则对任意 E -模型类 M 和 E -模型 m' , $m' \leq_r M^*$ 的充要条件是 $U(m') \leq_r (UM)^*$.

证 由定理 4, 定理 8 和满足性条件易证.

参 考 文 献

- 1 Burstall R, Goguen J. The semantics of clear, a specification language. Lecture Notes in Computer Science 86, New York: Springer-Verlag, 1980. 292~ 332
- 2 Goguen J A, Burstall R M. Institutions: abstract model theory for specification and programming. Journal of the Association for Computing Machinery, 1992, 39(1): 95~ 146
- 3 Mac Lane S. Categories for the working mathematician. New York: Springer-Verlag, 1971. 55~ 71
- 4 陆汝铃. 计算机语言的形式语义学. 北京: 科学出版社, 1992. 527~ 699
- 5 应明生. Institution 中合并理论的初始与终结语义. 软件学报, 1996, 7(6): 360~ 363
- 6 刘富春. Liberal 理论态射的一些性质. 江西师范大学学报(自然科学报). 1997, 21(1): 17~ 21

Closure Theorem of the Theory and Model in Institution

Liu Fuchun

(Dept. of Mathematics and Physics, GDUT, Guangzhou, 510090)

Abstract Some properties of theory and model are studied in the general frame Institution. Especially, closure theorems of theory and model are obtained.

Key words programming specification; abstract model theory; category theory